Pengantar Vektor

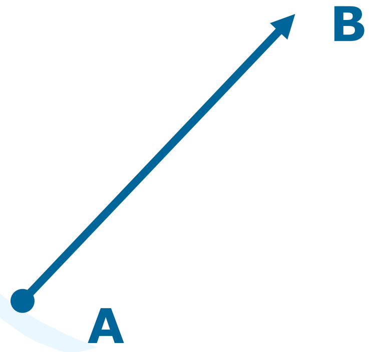
- Besaran
  - Skalar (Tidak mempunyai arah)
  - Vektor (Mempunyai Arah)

Vektor Geometris

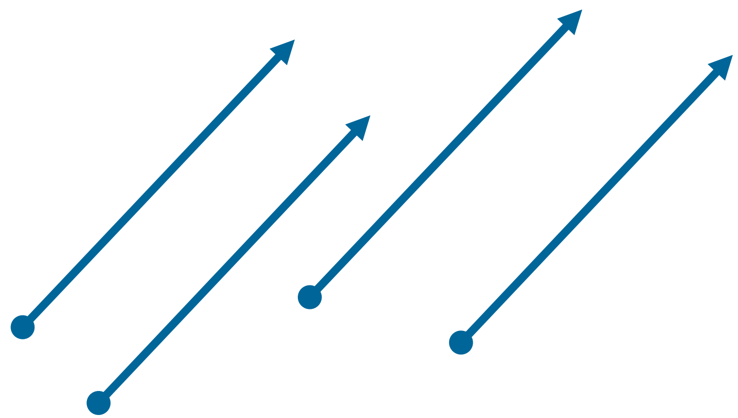
- Skalar (Luas, Panjang, Massa, Waktu dan lain - lain), merupakan suatu besaran yang mempunyai nilai mutlak tertentu.
- Vektor (Gaya, Percepatan, Berat, Kecepatan dan lain - lain), merupakan suatu besaran yang mempunyai nilai mutlak dan arah tertentu.
- Vektor disajikan secara geometris sebagai ruas garis berarah atau panah dalam ruang berdimensi 2 dan ruang berdimensi 3.
- Arah panah menentukan ***arah vektor*** dan panjang panah menentukan ***besarnya vektor.***

- Ekor dari panah disebut ***titik pangkal vektor.***
- Ujung panah disebut ***titik ujung vektor.***
- **Vektor ditulis dalam huruf kecil tebal (a, k, v, w,** dan **x**), sedangkan Skalar ditulis dengan huruf kecil miring (*a, k, v, w,* dan *x*)
- Jika u menyatakan ruas garis berarah dari A ke B, maka ditulis dengan lambang ū = $\overrightarrow{AB}$, panjang vektor u dinyatakan dengan |u| dan panjang vektor AB dinyatakan dengan $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

- Vektor - vektor yang panjang dan arahnya sama disebut ekuivalen, vektor-vektor yang ekuivalen dipandang sama walaupun mungkin terletak pada posisi yang berbeda.
- Jika v dan w ekuivalen, kita tuliskan : v = w



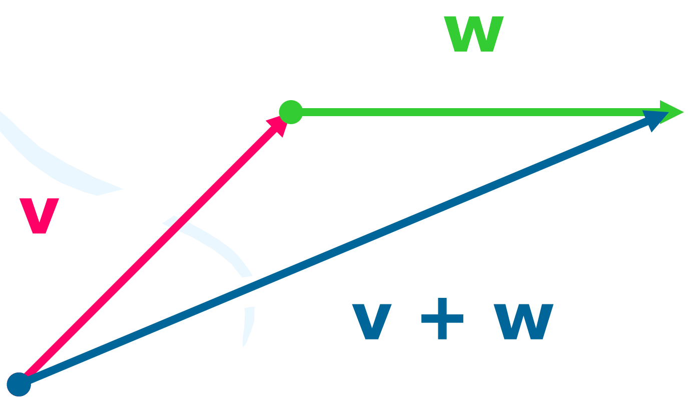
Vektor $\overrightarrow{AB}$



Vektor-vektor yang ekuivalen

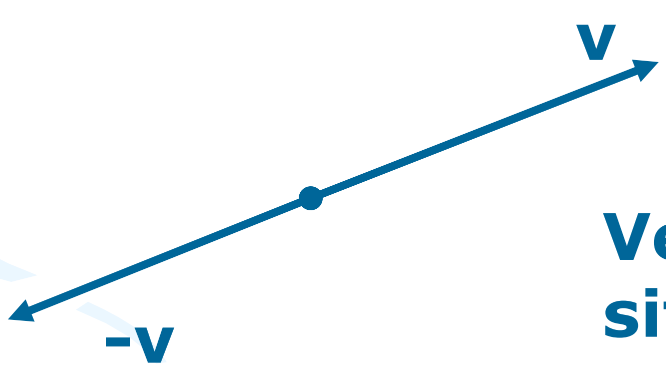
Jika **v** dan **w** adalah dua vektor sebarang, maka jumlah **v** dan **w** adalah vektor yang ditentukan sebagai berikut :

- **Letakkan vektor w sedemikian sehingga titik pangkalnya bertautan dengan titik ujung v.**
- **Vektor v + w disajikan oleh panah dari titik pangkal v ke titik ujung w.**



v + w = w + v

- Vektor yang panjangnya nol disebut vektor nol dan dinyatakan dengan 0.
- Jika v adalah sebarang vektor tak nol, maka **–v, negatif dari v,** didefinisikan sebagai vektor yang besarnya sama dengan v, tetapi **arahnya terbalik.**

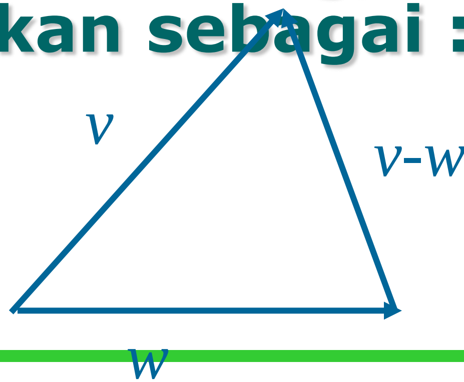


Vektor ini mempunyai sifat :

v + (-v) = 0

Jika v dan w adalah dua vektor sebarang, maka selisih w dari v didefinisikan sebagai :

$$\mathbf{v - w = v + (-w)}$$



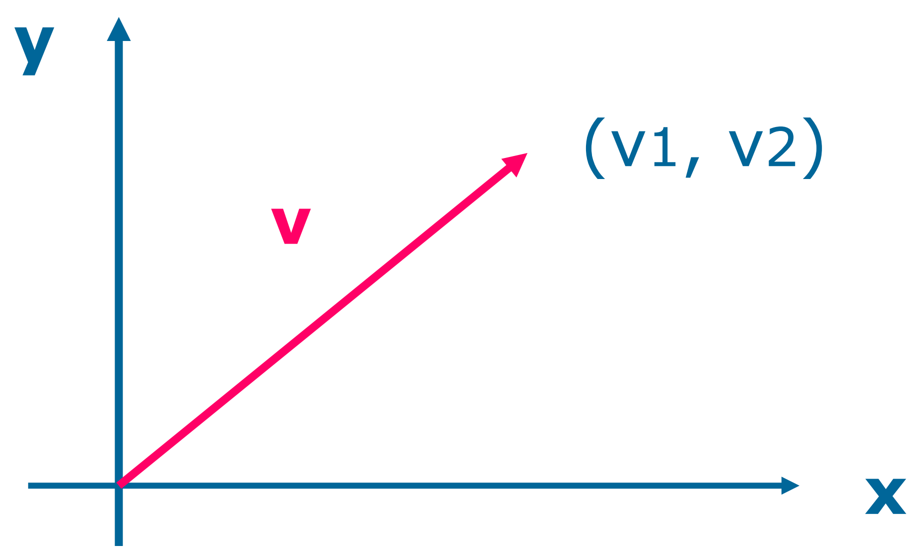
Jika v adalah suatu vektor tak nol dan k adalah suatu bilangan real tak nol (skalar), maka hasil kali kv didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya k kali panjang v dan arahnya sama dengan arah v jika k > 0 dan berlawanan arah dengan v jika k < 0. Kita definisikan *k*v = 0 jika *k* = 0 atau v = 0

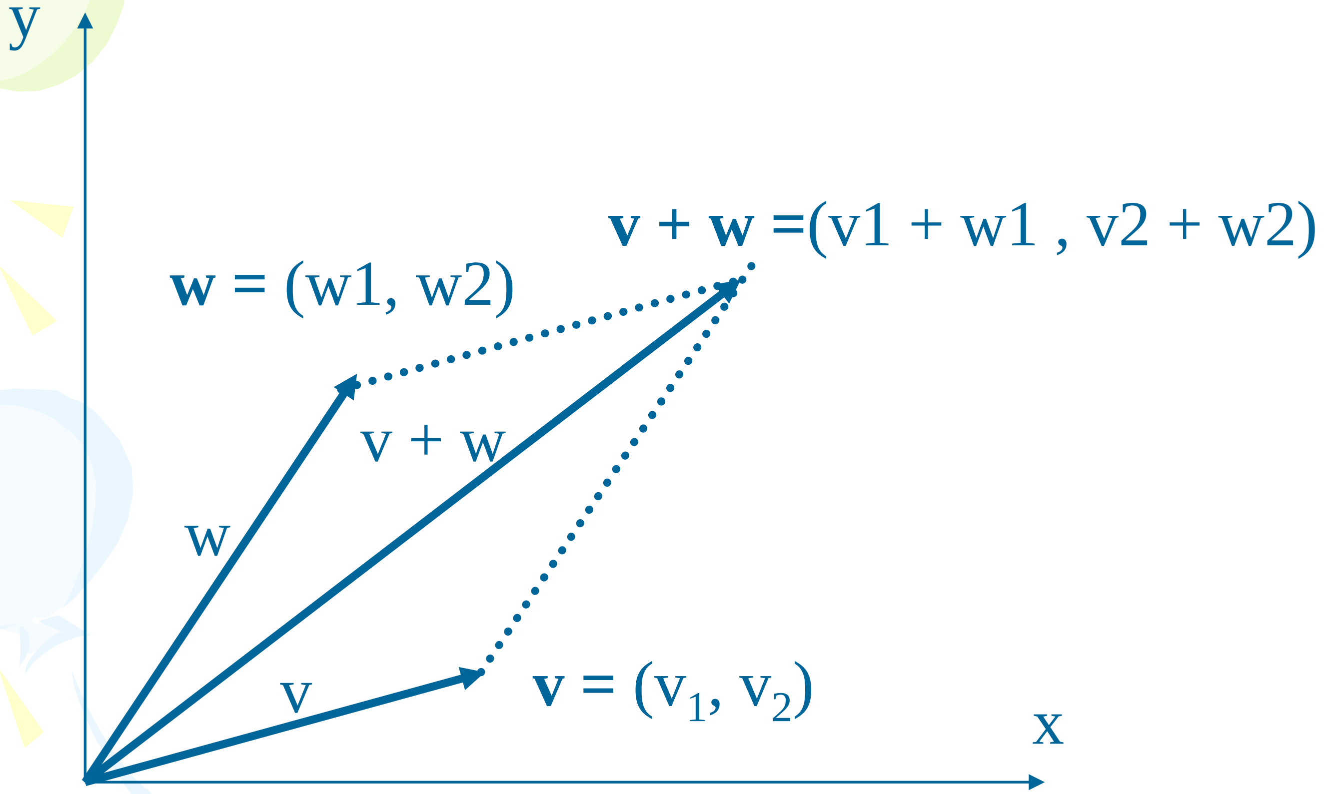
VEKTOR-VEKTOR DALAM RUANG BERDIMENSI 2 DAN RUANG BERDIMENSI 3

Vektor-vektor dalam sistem koordinat

- **Vektor - Vektor dalam Ruang Berdimensi 2 (Bidang)**

Koordinat v_1 dan v_2 dari titik ujung v disebut *komponen v*, dan kita tuliskan :
$v = (v_1, v_2)$





$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_1 - w_1\, ,\, v_2 - w_2)$

$k\mathbf{v} = (\, k.v_1,\, k.v_2)$

CONTOH :

Sketsa kan vektor-vektor berikut ini dengan titik pangkal pada titik asal :

(a) $\mathbf{v}_1 = (3,6)$ (b) $\mathbf{v}_2 = (-4, -8)$ (c) $\mathbf{v}_3 = (5,-4)$

Hitunglah !

(i) $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ dan $\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$

(ii) $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ dan $\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_2$

(iii) $k.\mathbf{v}_1$, $k.\mathbf{v}_2$, **dan** $k.\mathbf{v}_3$ jika $k = 3$

CONTOH :

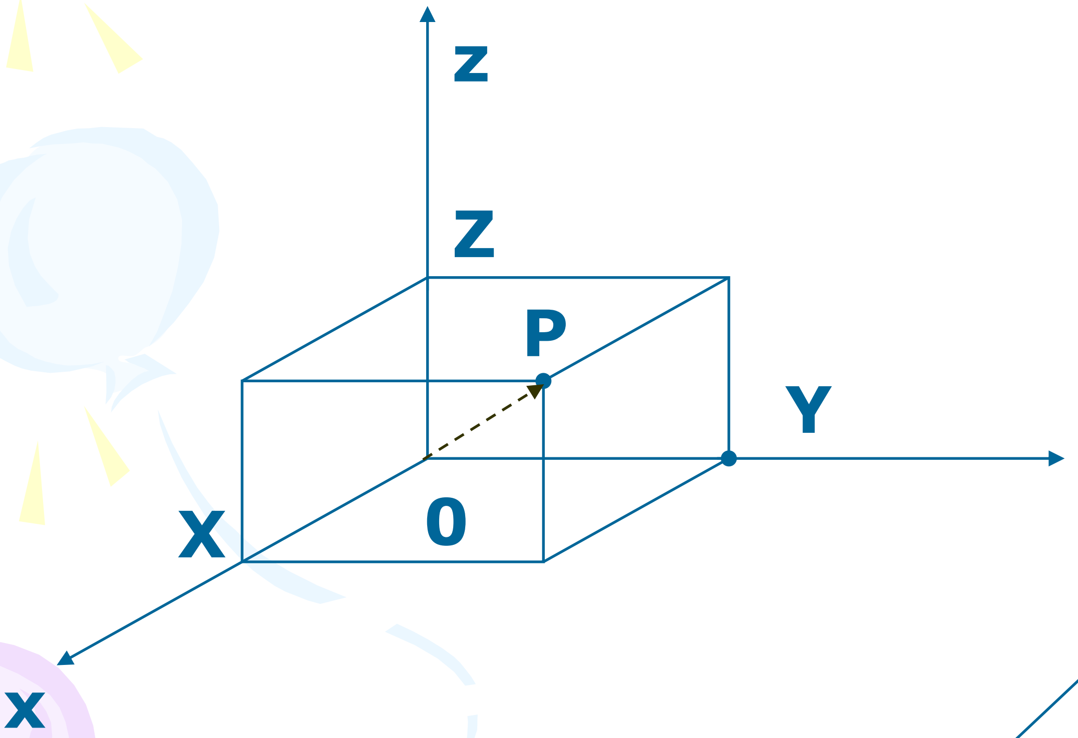
Sketsakan **u=**(-3, 1, 2), **v = **(4, 0, -8), dan carilah,

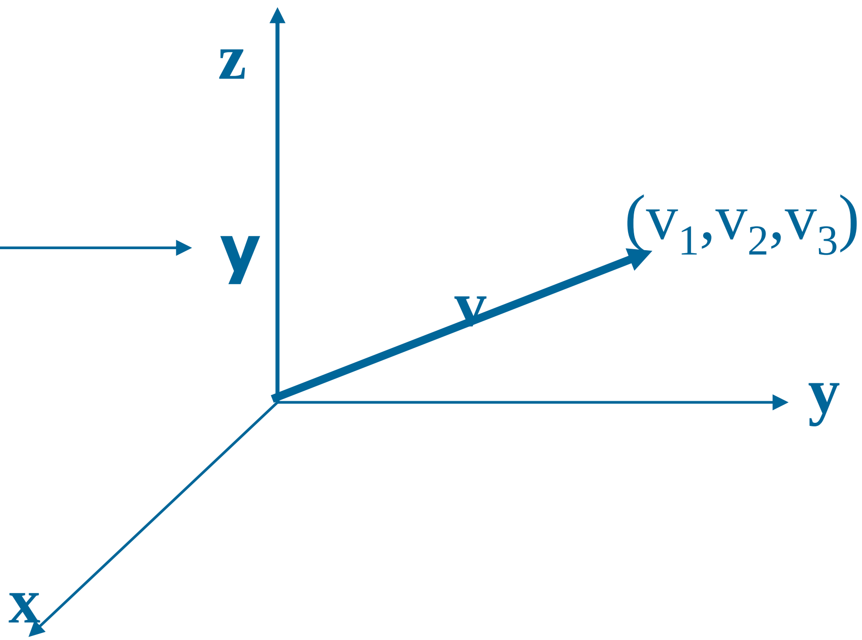
(a)u-v

(b)6**u+2v**

(c)5(v-4u)

- **Vektor - Vektor dalam Ruang Berdimensi 3 (Ruang)**





Jika vektor $\overline{P_1P_2}$ mempunyai titik pangkal $P_1(x_1,y_1,z_1)$ dan titik ujung $P_2(x_2,y_2,z_2)$, maka

$\overline{P_1P_2} = (x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$

Dengan kata lain $\overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1}$

CONTOH :

Sketsakan u=(-3, 1, 2), v = (4, 0, -8), dan carilah,

(a) u - v

(b) 6u + 2v

(c) 5(v - 4u)

Aksioma Ruang Vektor

Jika x, y dan z adalah suatu vektor dalam ruang berdimensi-2 dan ruang berdimensi-3. α dan β adalah skalar, maka berlaku hubungan berikut :

1. x + y = y + x → Sifat Komutatif
2. (x + y) + z = x + (y + z)

   → Sifat Asosiatif penjumlahan
3. x + 0 = 0 + x = x
4. 0x = 0 atau x0 = 0
5. x + (-1)x = x + -x = 0

6. Untuk suatu skalar α , α (x + y) = αx + αy

→ sifat distributif

7. (α +β) x = αx + βx, untuk suatu skalar β dan α

→ sifat distributif

8. (α β) x = α (βx), untuk suatu skalar α dan β

9. 1 . x = x

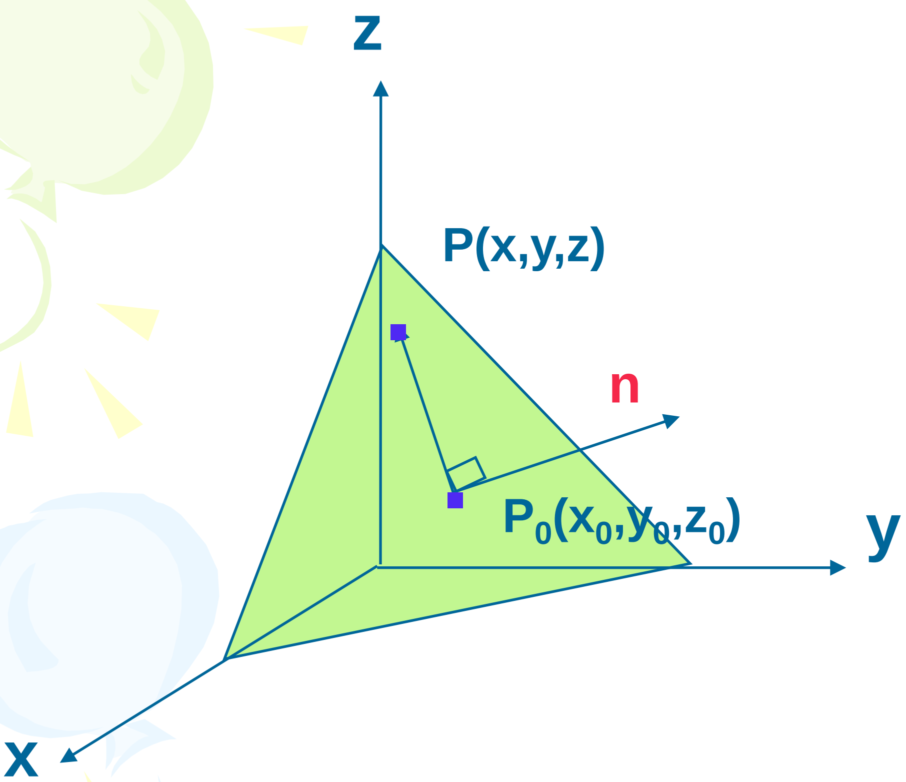
10. |mu| = |m| |u|

11. Jika mu = 0, maka m = 0 atau u = 0

12. Ketidaksamaan segitiga : $|u+v| \leq |u| + |v|$

BIDANG PADA RUANG DIMENSI 3

- Bidang dalam ruang dimensi 3 dapat ditentukan jika kemiringan dan salah satu titik yang terletak pada bidang tersebut diketahui.
- Bidang dalam ruang dimensi 3 dapat digambarkan dengan menggunakan suatu vektor normal yang tegak lurus terhadap bidang.



Misalkan n =(a,b,c) adalah vektor normal dari bidang yang melewati titik $P_0(x_0,y_0,z_0)$ dan P(x,y,z) dimana $\overrightarrow{P_0P}$ adalah vektor ortogonal terhadap n

$$n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$(a, b, c) \cdot (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0 \qquad \text{--- --- (i)}$$

Persamaan (i) disebut sebagai bentuk ***NORMAL – TITIK*** dari persamaan suatu bidang

BENTUK UMUM PERSAMAAN SUATU BIDANG DALAM DIMENSI 3

TEOREMA :

Jika a, b dan c adalah konstanta tidak nol, maka Grafik dari persamaan :

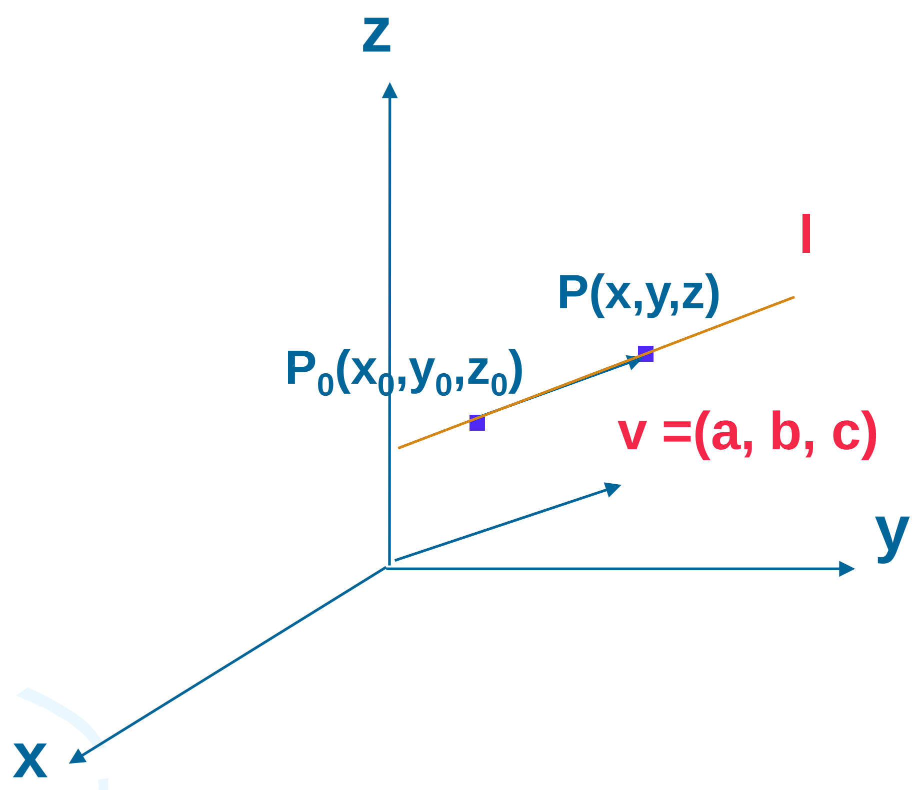
$$ax + by + cz + d = 0$$

adalah suatu bidang yang memiliki vektor :

$$n = (a, b, c)$$

Sebagai normalnya.

GARIS PADA RUANG DIMENSI 3



Berdasarkan gambar sebelumnya, diketahui bahwa garis l melalui titik P_0 dan P serta sejajar dengan vektor **v**. Jika terdapat suatu skalar T, maka diperoleh persamaan berikut :

$$\overrightarrow{P_0P} = t\,\mathbf{v}$$

dan;

$$(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0) = (ta\ ,\ tb,\ tc\ )$$

$$x-x_0 = ta \rightarrow x = x_0 + ta \quad \ldots\ldots(i)$$
$$y-y_0 = tb \rightarrow y = y_0 + tb \quad \ldots\ldots(ii)$$
$$z-z_0 = tc \rightarrow z = z_0 + tc \quad \ldots\ldots(iii)$$

persamaan (i), (ii), (iii) disebut ***persamaan parametrik*** untuk garis l

JARAK ANTARA TITIK DENGAN BIDANG

Jika D adalah jarak antara titik $P_0(X_0, Y_0, Z_0)$ dengan bidang :

$$ax + by + cz + d = 0$$

maka

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Bila terdapat $P_1(x_1,y_1,z_1)$ dan $P_2(x_2,y_2,z_2)$ yang merupakan dua titik dalam ruang berdimensi-3, maka *jarak* d antara kedua titik tersebut adalah:

$$\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Panjang & Jarak Vektor

- **Panjang suatu vektor u dinyatakan dengan |u|.**

Untuk ruang berdimensi 2.

u = (u_1, u_2)

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Untuk ruang berdimensi 3.

u = (u_1, u_2, u_3)

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Misal ada $P_1(x_1,y_1,z_1)$ dan $P_2(x_2,y_2,z_2)$ adalah dua titik dalam ruang berdimensi-3, maka *jarak* d antara kedua titik tsb adalah

$$\overline{P_1P_2} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right)$$

$$d = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}$$

Hasil kali Titik dari Vektor

Jika u dan v adalah vektor - vektor dalam ruang berdimensi 2 atau berdimensi 3 dan θ adalah sudut antara u dan v, maka hasil kali titik atau hasil kali dalam euclidean u.v, didefinisikan sebagai :

$$u.v = \begin{cases} |u||v|\cos\theta & \text{jika } u \neq 0 \text{ dan } v \neq 0 \\ 0 & \text{jika } u = 0 \text{ atau } v = 0 \end{cases}$$

- **u.v =** $u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3 \rightarrow R_3$
- **u.v =** $u_1.v_1 + u_2.v_2 \rightarrow R_2$

$$\cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|.\|v\|}$$

- CONTOH : **u =** (2,-1,1) DAN **v =** (1,1,2), CARILAH **u.v** dan tentukan sudut antara **u** dan **v**

Sudut Antar Vektor

- Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor tak nol, maka :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}}$$

Hasil kali titik bisa digunakan untuk memperoleh informasi mengenai sudut antara 2 vektor.

- Jika u dan v adalah vektor-vektor tak nol dan θ adalah sudut antara kedua vektor tersebut, maka :

θ lancip	**jika dan hanya jika $u.v>0$**
θ tumpul	**jika dan hanya jika $u.v<0$**
$\theta = \pi/2$	**jika dan hanya jika $u.v=0$**

Contoh 1.1

Diketahui vektor $\boldsymbol{v}$ = (2, -1, 1) dan $\boldsymbol{w}$=(1, 1, 2)

Carilah $\boldsymbol{v}.\boldsymbol{w}$ dan tentukan sudut antara $\boldsymbol{v}$ dan $\boldsymbol{w}$.

Jawab :

$$\boldsymbol{v}.\,\boldsymbol{w} = (2).(1) + (-1).(1) + (1)(2) = 2 - 1 + 2 = 3$$

$$\|v\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\|w\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

Jadi $\cos\theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, maka sudut antara v dan w adalah 60°

- $\mathbf{u}.\mathbf{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3 \rightarrow R_3$
- $\mathbf{u}.\mathbf{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 \rightarrow R_2$

CONTOH :

$\mathbf{u} = (2,-1,1)$ dan $\mathbf{v} = (1,1,2)$,

Carilah **u.v** serta tentukan sudut antara **u** dan **v**

Vektor-Vektor Ortogonal

- Vektor - vektor yang tegak lurus disebut dengan vektor - vektor ortogonal.
- Dua vektor u dan v ortogonal (tegak lurus) jika dan hanya jika uv = 0.
- Untuk menunjukkan bahwa u dan v adalah vektor - vektor yang ortogonal maka kita tuliskan $u \perp v$.

Proyeksi Ortogonal

- Jika u dan a adalah vektor - vektor dalam ruang berdimensi 2 atau 3 dan jika a ≠ 0, maka :

$$\boxed{\mathrm{Proy}_a u = \frac{u.a}{|a|^2}a} \longrightarrow$$

Komponen vektor u yang sejajar dengan a

$$\boxed{u - \mathrm{Proy}_a u = u - \frac{u.a}{|a|^2}a} \longrightarrow$$

Komponen vektor u yang ortogonal terhadap a

Hasil Kali Silang Vektor

- Jika hasil kali titik berupa suatu skalar maka hasil kali silang berupa suatu vektor.
- Jika $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 3, maka hasil kali silang $u \times v$ adalah vektor yang didefinisikan sebagai

  $u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u1v_2 - u_2v_1)$

  atau dalam notasi determinan :

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Sifat-sifat utama dari hasil kali silang.

- Jika u,v, dan w adalah sebarang vektor dalam ruang berdimensi 3 dan k adalah sebarang skalar, maka :

$$u \times v = -(v \times u)$$
$$u \times (v+w) = (u \times v) + (u \times w)$$
$$(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$$
$$k(u \times v) = (ku) \times v = u \times (kv)$$
$$u \times 0 = 0 \times u = 0$$
$$u \times u = 0$$

Contoh 1.2

Carilah $\boldsymbol{u}$ x $\boldsymbol{v}$ dimana $\boldsymbol{u}$ = (1, 2, -2) dan $\boldsymbol{v}$=(3, 0, 1)

Jawab :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u\ x\ v} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (2, -7, -6)$$

—

Hubungan antara hasil kali titik dan hasil kali silang

- Jika u, v dan w adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 3, maka :

$\mathbf{u.(u \times v) = 0}$	u x v ortogonal terhadap u.
$\mathbf{v.(u \times v) = 0}$	u x v ortogonal terhadap v.

$\mathbf{|u \times v|^2 = |u|^2 |v|^2 - (u.v)^2}$

$\mathbf{u \times (v \times w) = (u.w)v - (u.v)w}$

$\mathbf{(u \times v) \times w = (u.w)v - (v.w)u}$

RUANG VEKTOR UMUM

ALJABAR LINIER DAN MATRIK

RUANG VEKTOR REAL

- Aksioma ruang vektor, dinyatakan dlam definisi beikut, dimana aksiona merupakan aturan permainan dalam ruang vektor.
- Definisi : Jika V merupakan suatu himpunan tidak kosong dari objek – objek sebarang, dimana dua operasinya didefinisikan sebagai penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Operasi penjumlahan dapat diartikan sebagai suatu aturan yang mengasosiasikan setiap pasang onjek **u** dan **v** pada **v** dengan suatu objek **u** + **v** yang disebut jumlah dari **u** dan **v**.

Operasi perkalian skalar merupakan suatu aturan yang mengasosiasikan setiap skalar k dan setiap objek **u** pada **v** dengan suatu objek k**u**, yang disebut kelipatan skalar dari **u** oleh k. Jika aksioma berikut dipenuhi oleh semua objek **u**, **v**, **w** pada **v** dan semua skalar k dan l, maka **v** disebut sebagai *RUANG VEKTOR* dan objek – objek dalam **v** disebut *VEKTOR.*

AKSIOMA RUANG VEKTOR

1. Jika **u** dan **v** adalah objek pada **V**, maka **u** + **v** berada pada V
2. **u** + **v** = **v** + **u**
3. **u** + (**w** + **v**) = (**u** + **w**) + **v**
4. Didalam V terdapat objek 0, berupa vektor nol untuk V, sehingga 0 + **u** = **u** + 0 = **u**, untuk semua **u** pada V.
5. Untuk setiap **u** pada **V**, terdapat suatu objek u pada V, Yang disebut sebagai negatif dari u, sehingga : **u** + (-**u**) = (-**u**) + **u** = 0

6. Jika k adalah skalar sebarang dan **u** adalah objek sebarang pada V, maka k**u** terdapat pada V.
7. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
8. $(k + l)\,\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$
9. $k(l\mathbf{u}) = (kl)\,\mathbf{u}$
10. $1\,\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Contoh : Misalkan himpunan ***V*** merupakan himpunan bilangan riil positif dengan penambahan dan perkalian skalar didefinisikan oleh,

$x + y = xy$

$cx = x^c$

Himpunan ***V*** di bawah penambahan dan perkalian skalar merupakan suatu ruang vektor.

- ***Penyelesaian:***

1. Ambil x, y sembarang anggota $\boldsymbol{V}$. Karena x dan y bilangan riil positif, maka hasil dari xy merupakan bilangan riil positif. Jadi himpunan $\boldsymbol{V}$ tertutup di bawah penambahan (aksioma 1 terpenuhi).
2. Ambil x, y sembarang anggota $\boldsymbol{V}$.

   $x + y = xy$ (Definisi penjumlahan)

   $= yx$ (Perkalian bilangan riil bersifat komutatif)

   $= y + x$ (Definisi penjumlahan)

Jadi, $x + y = y + x$ (aksioma 2 terpenuhi).

3. Ambil x, y, dan z sembarang anggota $\boldsymbol{V}$.

   $x + (y + z) = x + (yz)$ (Definisi penjumlahan)

$= x(yz)$ (Definisi penjumlahan)

$= (xy)z$ (Perkalian bilangan riil bersifat asosiatif)

$= (xy) + z$ (Definisi penjumlahan)

$= (x + y) + z$ (Definisi penjumlahan)

Jadi, $x + (y + z) = (x + y) + z$ (aksioma 3 terpenuhi)

4. Ambil x sembarang anggota ***V***.

   Asumsikan 0 = 1 (karena penjumlahan pada himpunan ***V*** merupakan perkalian)

   $x + 0 = x \,.\, 1 = x$

   $0 + x = 1 \,.\, x = x$

   Jadi, $x + 0 = 0 + x = x$ (aksioma 4 terpenuhi)

5. Ambil x sembarang anggota ***V***.

   Karena x bilangan riil positif, maka terdapat anggota ***V***.

   Asumsikan 0 = 1 (karena penjumlahan pada himpunan ***V*** merupakan perkalian)

   $x + (-x) = x \,.\; = 1 = 0$

   Sehingga, untuk himpunan ***V*** terrdapat negatif dari x yaitu $-x$

- Jadi, $x + (-x) = 0$ (aksioma 5 terpenuhi).

6. Ambil x, y sembarang anggota ***V***. Karena x merupakan bilangan riil positif, maka untuk sembarang c diperoleh x^c bilangan riil positif. Jadi himpunan ***V*** tertutup di bawah perkalian skalar (aksioma 6 terpenuhi).

7. Ambil x, y sembarang anggota ***V*** dan sembarang skalar c.

   $c(x + y) = c(xy)$ (Definisi penjumlahan)

   $= (xy)^c$ (Definisi perkalian skalar)

   $= x^c y^c$ (Sifat pangkat bilangan riil)

   $= x^c + y^c$ (Definisi penjumlahan)

   $= cx + cy$ (Definisi perkalian skalar)

   Jadi, $c(x + y) = cx + cy$ (aksioma 7 terpenuhi).

8. Ambil x sembarang anggota ***V*** dan sembarang skalar c dan k.

   $=(c + k)x = x^{c + k}$ (Definisi perkalian skalar)

   $= x^c x^k$ (Sifat pangkat bilangan riil)

   $= x^c + x^k$ (Definisi penjumlahan)

   $= cx + kx$ (Definisi perkalian skalar)

- Jadi, $(c + k)x = cx + kx$ (aksioma 8 terpenuhi)

9. Ambil x sembarang anggota $\boldsymbol{V}$ dan sembarang skalar c dan k.

$c(kx) = c(x^k)$ (Definisi perkalian skalar)

$= (x^k)^c$ (Definisi perkalian skalar)

$= x^{ck}$ (Sifat pangkat bilangan riil)

$= (ck)x$ (Definisi perkalian skalar)

Jadi, $c(kx) = (ck)x$ (aksioma 9 terpenuhi).

10. x sembarang anggota $\boldsymbol{V}$.

$1x = x^1$ (Definisi perkalian skalar)

$= x$ (Sifat pangkat bilangan riil)

Jadi, $1x = x$ (aksioma 10 terpenuhi).

- Karena semua aksioma terpenuhi, maka himpunan $\boldsymbol{V}$ di bawah penambahan dan perkalian skalar merupakan suatu ruang vektor.

- **Teorema 1**

  Misalkan $\boldsymbol{V}$ adalah sebuah ruang vektor, $\mathbf{u}$ sebuah vektor pada $\boldsymbol{V}$, dan c sebarang skalar. Maka,

  1. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
  2. $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$
  3. $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$

  Jika $c\mathbf{u} = \mathbf{0}$, maka $c = 0$ atau $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

- ***Bukti:***

a. $\mathbf{0u = (0 + 0)u}$ (Sifat bilangan 0)

$\mathbf{= 0u + 0u}$ (Aksioma 8)

Menurut aksioma 5, maka vektor $\mathbf{0u}$ memiliki bilangan negatif yaitu $\mathbf{-0u}$. Dengan menambahkan bilangan negatif kepada kedua ruas di atas, maka diperoleh:

$\mathbf{0u + (-0u) = [0u + 0u] + (-0u)}$

$\Leftrightarrow \mathbf{0u + (-0u) = 0u + [0u + (-0u)]}$ (Aksioma 3)

$\Leftrightarrow \mathbf{0 = 0u + 0}$ (Aksioma 5)

$\Leftrightarrow \mathbf{0 = 0u}$ atau $\mathbf{0u = 0}$ (Aksioma 4)

Jadi, $\mathbf{0u = 0}$.

$b.\ c\mathbf{0} = c(\mathbf{0} + \mathbf{0})$ (Sifat bilangan 0)

$= c\mathbf{0} + c\mathbf{0}$ (Aksioma 8)

Menurut aksioma 5, maka vektor $c\mathbf{0}$ memiliki bilangan negatif yaitu $-\, c\mathbf{0}$.

Dengan menambahkan bilangan negatif kepada kedua ruas di atas, maka diperoleh:

$c\mathbf{0} + (-c\mathbf{0}) = [c\mathbf{0} + c\mathbf{0}] + (-c\mathbf{0})$

$\Leftrightarrow c\mathbf{0} + (-c\mathbf{0}) = c\mathbf{0} + [c\mathbf{0} + (-c\mathbf{0})]$ (Aksioma 3)

$\Leftrightarrow \mathbf{0} = c\mathbf{0} + \mathbf{0}$ (Aksioma 5)

$\Leftrightarrow \mathbf{0} = c\mathbf{0}$ atau $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$ (Aksioma 4)

Jadi, $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

c. Untuk menunjukkan $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$, maka harus ditunjukkan bahwa $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

$\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u}$ (Aksioma 10)

$= [1 + (-1)]\mathbf{u}$ (Aksioma 8)

$= 0\mathbf{u}$ (Sifat bilangan)

$= \mathbf{0}$ (Berdasarkan (a) di atas)

Jadi, $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$.

d. Asumsikan $c \neq 0$, diperoleh:

$\mathbf{u} = 1\mathbf{u}$ (Aksioma 10)

$= \mathbf{u}$ (Invers perkalian)

$=$ ($c\mathbf{u}$) (Perkalian bersifat asosiatif)

$= \mathbf{0}$ (Diketahui)

$= \mathbf{0}$ (Berdasarkan (b) di atas)

Asumsikan $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, diperoleh:

$c = 1c$ (Aksioma 10)

$= c$ (Invers perkalian)

$=$ ($\mathbf{u}c$) (Perkalian bersifat asosiatif)

$=$ ($c\mathbf{u}$) (Perkalian bersifat komutatif)

$= \mathbf{0}$ (Diketahui)

$= \mathbf{0}$ (Berdasarkan (b) di atas)

Jadi, jika $c\mathbf{u} = \mathbf{0}$, maka $c = 0$ atau $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

SUBRUANG

DEFINISI :

SUATU SUB HHIMPUNAN W DARI SUATU RUANG VEKTOR V DISEBUT SUBRUANG DARI V JIKA W ITU SENDIRI MERUPAKAN SUATU RUANG VEKTOR DI BAWAH PENJUMLAHAN DAN PERKALIAN SKALAR YANG DIDEFINISIKAN PADA V.

TEOREMA

JIKA W ADALAH SUATU HIMPUNAN YANG TERDIRI DARI SATU ATAU LEBIH VEKTOR DARI SUATU RUANG VEKTOR V, MAKA W ADALAH SUATU SUBRUANG DARI V, JIA DAN HANYA JIKA SYARAT BERIKUT TERPENUHI,

a) JIKA u DAN v ADALAH VEKTOR – VEKTOR PADA W, MAKA u + v BERADA PADA W.
b) JIKA *k* ADALAH SKALAR SEBARANG DAN u ADALAH VEKTOR SEBARANG PADA W, MAKA *k*u BERADA PADA W.

Contoh 1

Misalkan ***W*** himpunan semua titik, (x, y) dari $\mathbf{R}^2$ dengan $x \geq 0$. Apakah ***W*** merupakan subruang dari $\mathbf{R}^2$?

Penyelesaian:

Himpunan ***W*** tertutup di bawah penambahan karena,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

dan karena $x_1, x_2 \geq 0$, maka $x_1 + x_2 \geq 0$ dan hasilnya terletakdi ***W***.

Akan tetapi, himpunan ***W*** tidak tertutup di bawah perkalian skalar. Misalkan c sembarang skalar negatif dan selanjutnya kita asumsikan $x > 0$, maka:

$$c(x, y) = (cx, cy)$$

karena $x > 0$ dan $c < 0$ kita punyai $cx < 0$ dan hasilnya tidak terletak di ***W***.

Jadi, ***W*** bukan merupakan subruang dari $\mathbf{R}^2$.

Contoh 2

Misalkan ***W*** himpunan semua titik dari $\mathbf{R}^3$ yang berbentuk $(0, x_2, x_3)$. Apakah ***W*** merupakan subruang dari $\mathbf{R}^3$?

Penyelesaian:

Misalkan $\mathbf{x} = (0, x_2, x_3)$ dan $\mathbf{y} = (0, y_2, y_3)$ dua titik sembarang di ***W*** dan misalkan c sembarang skalar, maka:

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (0, x_2, x_3) + (0, y_2, y_3) = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

$$c\mathbf{x} = (0, cx_2, cx_3)$$

$\mathbf{x} + \mathbf{y}$ dan $c\mathbf{x}$ terletak di ***W*** ,sehingga ***W*** tertutup di bawah penambahan dan perkalian skalar.

Jadi, ***W*** merupakan subruang dari $\mathbf{R}^3$.

KOMBINASI LINIER

DEFINISI :

SUATU VEKTOR w DISEBUT SUATU KOMBNASI LINIER DARI VEKTOR – VEKTOR $v_1, v_2, \ldots, v_r$ JIKA DAPAT DINYATAKAN DALAM BENTUK

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_r v_r$$

DIMANA $k1, k_2, \ldots, k_r$ ADALAH SKALAR.

Contoh 1

a. Apakah $\mathbf{w} = (-12, 20)$ merupakan kombinasi linear dari $\mathbf{v_1} = (-1, 2)$ dan $\mathbf{v_2} = (4, -6)$?

b. Apakah $\mathbf{w} = (1, -4)$ merupakan kombinasi linear dari $\mathbf{v_1} = (2, 10)$ dan $\mathbf{v_2} = (-3, -15)$?

Penyelesaian:

a. Supaya $\mathbf{w}$ merupakan kombinasi linear $\mathbf{v_1}$ dan $\mathbf{v_2}$, maka harus ada skalar c_1 dan c_2, sehingga:

$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2}$

$(-12, 20) = c_1(-1, 2) + c_2(4, -6)$

atau

$(-12, 20) = (-c_1 + 4c_2, 2c_1 - 6c_2)$

Penyamaan komponen-komponen yang bersesuaian memberikan:

$-c_1 + 4c_2 = -12$

$2c_1 - 6c_2 = 20$

Dengan memecahkan sistem ini akan menghasilkan $c_1 = 4$ dan $c_2 = -2$.

Jadi, $\mathbf{w}$ merupakan kombinasi linear dari $\mathbf{v_1}$ dan $\mathbf{v_2}$. Dapat ditulis $\mathbf{w} = 4\mathbf{v_1} - 2\mathbf{v_2}$.

b. Supaya **w** merupakan kombinasi linear $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$, maka harus ada skalar c_1 dan c_2, sehingga:

$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$

$(1, -4) = c_1(2, 10) + c_2(-3, -15)$

atau

$(1, -4) = (2c_1 - 3c_2, 10c_1 - 15c_2)$

Penyamaan komponen-komponen yang bersesuaian memberikan:

$2c_1 - 3c_2 = 1$

$10c_1 - 15c_2 = -4$

Sistem ini tidak memiliki penyelesaian.

Jadi, **w** bukan merupakan kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$.

MERENTANG

- JIKA $v_1, v_2, \ldots, v_r$ ADALAH VEKTOR – VEKTOR PADA SUATU RUANG VEKTOR V, MAKA UMUMNYA BEBERAPA VEKTOR PADA V MUNGKIN MERUPAKAN KOMBINASI LINIER DARI $v_1, v_2, \ldots, v_r$ DAN VEKTOR LAINNYA MUNGKIN TIDAK.
- **TEOREMA** :

JIKA $v_1, v_2, \ldots, v_r$ ADALAH VEKTOR – VEKTOR PADA SUATU RUANG VEKTOR V, MAKA :

(a) HIMPUNAN W YANG TERDIRI DARI SEMUA KOMBINASI LINIER $v_1, v_2, \ldots, v_r$ ADALAH SUATU SUBRUANG DARI V.

(b) W ADALAH SUBRUANG TERKECIL DARI V YANG MENGANDUNG $v_1, v_2, \ldots, v_r$ DALAM ARTI BAHWA SETIAP SUBRUANG LAIN DARI V YANG MENGANDUNG $v_1, v_2, \ldots, v_r$ PASTI MENGANDUNG W.

Contoh 2

Jelaskan rentangan setiap himpunan vektor di bawah ini!

$\mathbf{v_1} = (1, 0, 0)$ dan $\mathbf{v_2} = (0, 1, 0)$

$\mathbf{v_1} = (1, 0, 1, 0)$ dan $\mathbf{v_2} = (0, 1, 0, -1)$

<u>Penyelesaian:</u>

a. Bentuk umum kombinasi linearnya yaitu:

$a\mathbf{v_1} + b\mathbf{v_2} = (a, 0, 0) + (0, b, 0) = (a, b, 0)$

Jadi, lin$\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ merupakan semua vektor-vektor dari R^3 yang berbentuk $(a, b, 0)$ untuk sembarang a dan b.

b. Bentuk umum kombinasi linearnya yaitu:

$a\mathbf{v_1} + b\mathbf{v_2} = (a, 0, a, 0) + (0, b, 0, -b) = (a, b, a, -b)$

Jadi, lin$\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ merupakan semua vektor-vektor dari R^4 yang berbentuk $(a, b, a, -b)$ untuk sembarang a dan b.

DEFINISI :

JIKA $S=\{v_1, v_2,\ldots, v_r\}$ ADALAH SUATU HMPUNAN VEKTOR – VEKTOR PADA SUATU RUANG VEKTOR V, MAKA SUBRUANG W DARI V YANG TERDIRI DARI SEMUA KOMBINASI LINIER VEKTOR – VEKTOR PADA S DISEBUT SEBAGAI RUANG YANG DIRENTANG OLEH $v_1, v_2,\ldots, v_r$ DAN VEKTOR – VEKTOR $v_1, v_2,\ldots, v_r$ MERENTANG W.

KEBEBASAN LINIER

DEFINISI :

JIKA S ={v_1, v_2,…, v_r} ADALAH HIMPUNAN TAK KOSONG VEKTOR – VEKTOR, MAKA PERSAMAAN VEKTOR $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots k_r v_r = 0$, MEMILIKI SEDIKITNYA SATU SOLUSI , YAITU

$$k_1=0\ ,\ k_2=0, \dots,\ k_r=0.$$

JIKA SOLUSI TERSEBUT MERUPAKAN SATU – SATUNYA SOLUSI, MAKA S DISEBUT SEBAGAI HIMPUNAN BEBAS LINIER.

JIKA TERDAPAT SOLUSI – SOLUSI LAIN MAKA S DISEBUT SEBAGAI

HIMPUNAN TIDAK BEBAS LINIER

Contoh 1

Tentukanlah apakah himpunan vektor-vektor di bawah ini membentuk himpunan takbebas linear atau himpunan bebas linear.

a. $\mathbf{v_1} = \mathbf{(3, -1)}$ dan $\mathbf{v_2} = \mathbf{(-2, 2)}$

b. $\mathbf{v_1} = \mathbf{(2, -2, 4)}$, $\mathbf{v_2} = \mathbf{(3, -5, 4)}$, dan $\mathbf{v_3} = \mathbf{(0, 1, 1)}$

<u>Penyelesaian:</u>

Persamaan vektornya adalah:

$c_1(3, -1) + c_2(-2, 2) = 0$

$(3c_1 - 2c_2, -c_1 + 2c_2) = 0$

Dengan menyamakan komponen yang bersesuaian akan memberikan:

$3c_1 - 2c_2 = 0$

$-c_1 + 2c_2 = 0$

Pemecahan sistem persamaan di atas adalah:

$c_1 = 0$ $\qquad\qquad$ $c_2 = 0$

Jadi, sistem tersebut mempunyai pemecahan trivial, maka merupakan himpunan bebas linear.

b. Persamaan vektornya adalah:

$\boldsymbol{c_1}(2, -2, 4) + \boldsymbol{c_2}(3, -5, 4) + \boldsymbol{c_3}(0, 1, 1) = 0$

$(2\boldsymbol{c_1} + 3\boldsymbol{c_2}, -2\boldsymbol{c_1} - 5\boldsymbol{c_2} + \boldsymbol{c_3}, 4\boldsymbol{c_1} + 4\boldsymbol{c_2} + \boldsymbol{c_3}) = 0$

Dengan menyamakan komponen yang bersesuaian akan memberikan:

$2\boldsymbol{c_1} + 3\boldsymbol{c_2} = 0$

$-2\boldsymbol{c_1} - 5\boldsymbol{c_2} + \boldsymbol{c_3} = 0$

$4\boldsymbol{c_1} + 4\boldsymbol{c_2} + \boldsymbol{c_3} = 0$

Pemecahan sistem persamaan di atas adalah:

$\boldsymbol{c_1} = \boldsymbol{c_2} = \boldsymbol{c_3} = t$, dimana t sebarang bilangan riil.

Jadi, sistem tersebut mempunyai pemecahan taktrivial, maka merupakan himpunan takbebas linear.

- **Definisi 1**

Misalkan S = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$} adalah himpunan vektor, maka persamaan vektor

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

mempunyai paling sedikit satu pemecahan, yakni:

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ \ldots,\ c_n = 0$$

pemecahan tersebut dinamakan pemecahan trivial.

Jika pemecahan trivial ini adalah satu-satunya pemecahan, maka himpunan S dinamakan bebas linear dan himpunannya dinamakan himpunan bebas linear. Jika ada pemecahan lain, maka himpunan S dinamakan takbebas linear dan himpunannya dinamakan himpunan takbebas linear.

TEOREMA

SUATU HIMPUNAN S DENGAN DUA ATAU LEBIH VEKTOR ADALAH :

a) TIDAK BEBAS LINIER JIKA DAN HANYA JIKA PALING TIDAK SALAH SATU VEKTOR PADA S DAPAT DINYATAKAN SEBAGAI SUATU KOMBINASI LINIER DARI VEKTOR – VEKTOR LAIN PADA S.
b) BEBAS LINIER JIKA DAN HANYA JIKA TIDAK ADA VEKTOR PADA S YANG DAPAT DINYATAKAN SEBAGAI SUATU KOMBINASI LINER DARI VEKTOR – VEKTOR LAIN PADA S.

BASIS

DEFINISI :

JIKA V ADALAH SUATU RUANG VEKTOR SEBARANG DAN S $=\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ ADALAH SUATU HIMPUNAN VEKTOR – VEKTOR PADA V, MAKA S DISEBUT *BASIS* UNTUK V JIKA DUA SYARAT BERIKUT TERPENUHI :

a) S BEBAS LINIER
b) S MERENTANG V

- Contoh:
- 1. Tentukan apakah himpunan vector-vektor berikut merupakan basis?
- a
- b.

DIMENSI

DEFINISI :

DIMENSI DARI RUANG VEKTOR V YANG BERDIMENSI TEHINGGA, DINOTASIKAN DENGAN dim(V) , DIDEFINISIKAN SEBAGAI BANYAKNYA VEKTOR – VEKTOR PADA SUATU BASIS UNTUK V. SELAIN ITU, KITA MENDEFINISIKAN RUANG VEKTOR NOL SEBAGAI BERDIMENSI NOL.

RUANG BARIS,RUANG KOLOM DAN RUANG NUL

MISALKAN

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$r_1 = [a_{11}, \quad a_{12}, \dots, a_{1n}]$

$r_2 = [a_{21}, \quad a_{22}, \dots, a_{2n}]$

....

$r_n = [a_{m1}, \quad a_{m2}, \dots, a_{mn}]$

$$c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

DEFINISI

Untuk suatu matrik A m x n dan vektor r_1 , r_2, …, r_m pada R^n Yang dibentuk dari baris – baris A disebut sebagai VEKTOR BARIS dari A dan vektor - vektor c_1 , c_2, …, c_n pada R^m yang dibentuk dari kolom – kolom A disebut sebagai VEKTOR KOLOM dari A.

DEFINISI

- Jika A adalah suatu matrik m x n. Ruang solusi dari sistem persamaan yang homogen $Ax = 0$, yang merupakan subruang dari R^n, disebut RUANG NUL dari A

RUANG VEKTOR EUCLIDEAN

ALJABAR LINIER DAN MATRIK

VEKTOR PADA RUANG BERDIMENSI N

DEFINISI :

JIKA n ADALAH SUATU BIL. BULAT POSITIF, MAKA TUPEL N BERURUTAN ADALAH SUATU URUTAN DARI n BILANGAN RIIL $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. HIMPUNAN SEMUA TUPEL n BERURUTAN DISEBUT ***RUANG BERDIMENSI n (n-SPACE) DAN*** DINYATAKAN SEBAGAI $\boldsymbol{R^n}$.

DEFINISI :

DUA VEKTOR $u = (u_1, u_2,\ldots,u_n)$ DAN $v = (v_1, v_2,\ldots,v_n)$ PADA R^n DISEBUT SAMA JIKA

$$u_1 = v_1\,,\quad u_2 = v_2,\quad u_3 = v_3$$

JUMLAH KEDUA VEKTOR u DAN v

$$u + v = (u_1+v_1\,, u_2+v_2, u_3+ v_3\,)$$

SIFAT – SIFAT OPERASI VEKTOR PADA R^n

JIKA U , V, DAN W ADALAH VEKTOR – VEKTOR DALAM Rn DAN K, L ADALAH SUATU SKALAR, MAKA :

a. $U + V = V + U$
b. $U + (V + W) = (U + V) + W$
c. $U + 0 = 0 + U = U$
d. $U + (-U) = 0$
e. $K(LU) = (KL)U$
f. $K(U + V) = KU + KV$
g. $(K + L)U = KU + LU$
h. $1U = U$

DEFINISI :

JIKA U DAN V ADALAH VEKTOR – VEKTOR SEBARANG PADA R^n , MAKA HASIL KALI DALAM EUCLIDEAN U . V DIDEFINISIKAN SEBAGAI

$$U \cdot V = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

HASIL KALI DALAM EUCLIDEAN PADA RUANG BERDIMENSI n MERUPAKAN *RUANG BERDIMENSI n EUCLIDEAN.*

NORMA DAN JARAK PADA RUANG BERDIMENSI n EUCLIDEAN

NORMA EUCLIDEAN DARI SUATU VEKTOR u DALAM R^n DIDEFINISIKAN :

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$$

JARAK EUCLIDEAN ANTARA TITIK u DAN v PADA R^n DIDEFINISIKAN SEBAGAI BERIKUT

$$d(u,v) = \|u - v\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}$$

KETAKSAMAAN CAUCHY-SCHWARZ PADA R^n

Jika u dan v adalah vektor pada R^n, maka

$$| u \cdot v | \leq ||u|| \; ||v||$$

TEOREMA PHYTAGORAS PADA R^n

JIKA u DAN v ADALAH VEKTOR – VEKTOR ORTOGONAL PADA Rn DENGAN HASIL KALI DALAM EUCLIDEAN, MAKA

$$|| u + v ||2 = ||u||^2 + ||v||^2$$

NOTASI ALTERNATIF UNTUK VEKTOR PADA R^n

MISALKAN u ADALAH VEKTOR PADA R^n, MAKA NOTASI MATRIK VEKTOR u ADALAH

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} \quad atau \quad u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}$$

RUMUS MATRIK UNTUK HASIL KALI TITIK

MISALKAN u DAN v ADALAH VEKTOR DALAM R^n

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad dan \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$maka$

$$u \, . \, v = v^T u$$

PERGESERAN SUMBU

Ketika kita menggeser sumbu –XY sehingga mendapatkan –X'Y'. O' Titik awal baru berada pada titik (x , y) = (k , l), selanjutnya terdapat :

$$\overline{O'P} = (x', y') ,$$

maka :

$$x' = x - k \quad \text{dan} \quad y' = y - l$$