



Program Linier

Dosen Pengampu : Dwi Sulistyaningsih

Pendahuluan

- Secara Umum :

Program linier merupakan salah satu teknik penyelesaian riset operasi dalam hal ini adalah khusus menyelesaikan masalah-masalah optimasi (memaksimalkan atau meminimumkan) tetapi hanya terbatas pada masalah-masalah yang dapat diubah menjadi fungsi linier. Demikian pula kendala-kendala yang ada juga berbentuk linier.

- Secara khusus :

Persoalan program linier adalah suatu persoalan untuk menentukan besarnya masing-masing nilai variabel sedemikian rupa sehingga nilai *fungsi tujuan* atau *objektif* (*objective function*) yang linier menjadi optimum (max atau min) dengan memperhatikan kendala yang ada yaitu kendala ini harus dinyatakan dengan ketidaksamaan yang linier (*linear inequalities*).

Program Linier

Program linier (*Linier Programming*)

- Merupakan metode matematik dalam mengalokasikan sumber daya yang langka untuk mencapai tujuan tunggal seperti memaksimalkan keuntungan atau meminimumkan biaya.
- Banyak diterapkan dalam membantu menyelesaikan masalah ekonomi, industri, militer, sosial, dll.
- Berkaitan dengan penjelasan suatu dunia nyata sebagai suatu model matematik yang terdiri atas sebuah fungsi tujuan linier & sistem kendala linier.

Syarat Persoalan Disebut Program Linier

1. Tujuan (*objective*)

Apa yang menjadi tujuan permasalahan yang dihadapi yang ingin dipecahkan dan dicari jalan keluarnya.

Tujuan ini harus jelas dan tegas yang disebut *fungsi tujuan* (*objective function*). Fungsi tujuan tersebut dapat berupa dampak positif, manfaat-manfaat, atau dampak negatif, kerugian-kerugian, resiko-resiko, biaya-biaya, jarak, waktu yang ingin diminimumkan.

2. Alternatif perbandingan.

Harus ada sesuatu atau alternatif yang ingin diperbandingkan, misalnya antara kombinasi waktu tercepat dan biaya tertinggi dengan waktu terlambat dan biaya terendah, atau alternatif padat modal dengan padat karya, proyeksi permintaan tinggi dengan rendah, dan seterusnya.

Lanjutan...

3. Sumber Daya

Sumber daya yang dianalisis harus berada dalam keadaan terbatas. Misalnya keterbatasan tenaga, bahan mentah terbatas, modal terbatas, ruangan untuk menyimpan barang terbatas, dan lain-lain. Pembatasan harus dalam *ketidaksamaan linier (linier inequality)*. Keterbatasan dalam sumber daya tersebut dinamakan sebagai *fungsi kendala* atau *syarat ikatan*.

4. Perumusan Kuantitatif.

Fungsi tujuan dan kendala tersebut harus dapat dirumuskan secara kuantitatif dalam model matematika.

5. Keterikatan Perubah.

Perubah-perubah yang membentuk fungsi tujuan dan fungsi kendala tersebut harus memiliki hubungan keterikatan hubungan keterikatan atau hubungan fungsional.

Bentuk Standar

Fungsi tujuan dan semua kendala adalah fungsi linier terhadap variabel keputusan

Bentuk standar dari program linier adalah sbb:

$$\max c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{sl} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

:

:

:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Formulasi Model Matematika

- Masalah keputusan yang sering dihadapi analis adalah alokasi optimum sumber daya.
- Sumber daya dapat berupa uang, tenaga kerja, bahan mentah, kapasitas mesin, waktu, ruangan atau teknologi.
- Tugas analis adalah mencapai hasil terbaik Dengan keterbatasan sumber daya itu.
- Setelah masalah diidentifikasi, tujuan ditetapkan, langkah selanjutnya adalah formulasi model matematik.
- Formulasi model matematik ada 3 tahap:
 - Tentukan variabel yang tidak diketahui dan dinyatakan dalam simbol.
 - Membentuk fungsi tujuan yang ditunjukkan sebagai suatu hubungan linier dari variabel keputusan
 - Menentukan semua kendala masalah tersebut dan mengekspresikannya dalam persamaan atau pertidaksamaan.

- Contoh :
- Suatu perusahaan menghasilkan dua barang, boneka dan mobil-mobilan. Harga masing-masing barang dan kebutuhan sumber daya terlihat pada tabel berikut ini dan disamping itu, menurut bagian penjualan, permintaan boneka tidak akan melebihi 4 unit.

Sumber daya	boneka	mobil-mobilan	Kapasitas
Bahan mentah	1	2	10
Buruh	6	6	36
Harga per unit	4	5	

Pada kasus ini, masalah yang dihadapi perusahaan adalah menentukan jumlah masing-masing produk yang harus dihasilkan agar keuntungan maksimum. Sekarang kita akan merumuskan masalah dalam suatu model matematika!

Jawab :

Variabel keputusan

- Variabel masalah ini adalah penjualan masing-masing mainan yaitu:

X_1 = boneka

X_2 = mobil-mobilan

■ Fungsi Tujuan

- Tujuan masalah ini adalah memaksimalkan keuntungan. Biaya total dalam konteks ini adalah harga per unit dari masing-masing jenis mainan yang dijual sehingga biaya total Z , dituliskan sebagai berikut: $Z = 4X_1 + 5X_2$

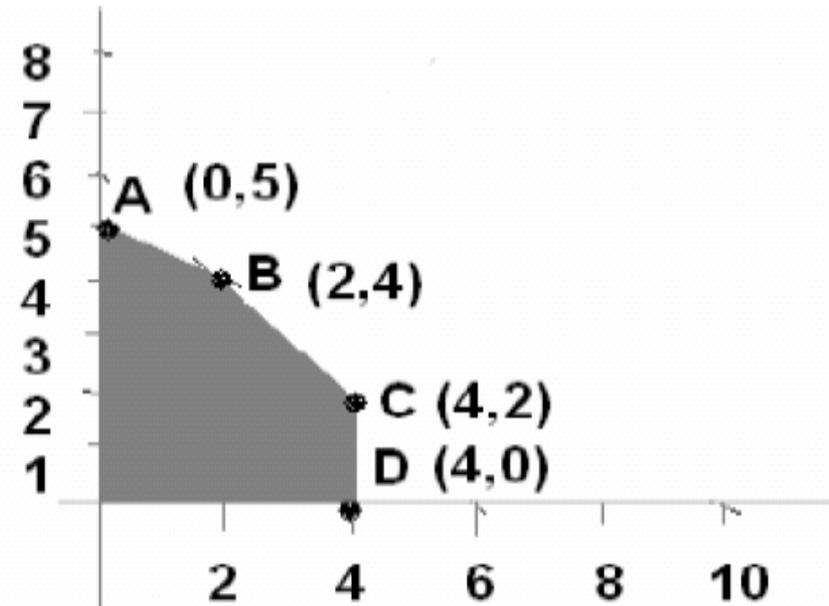
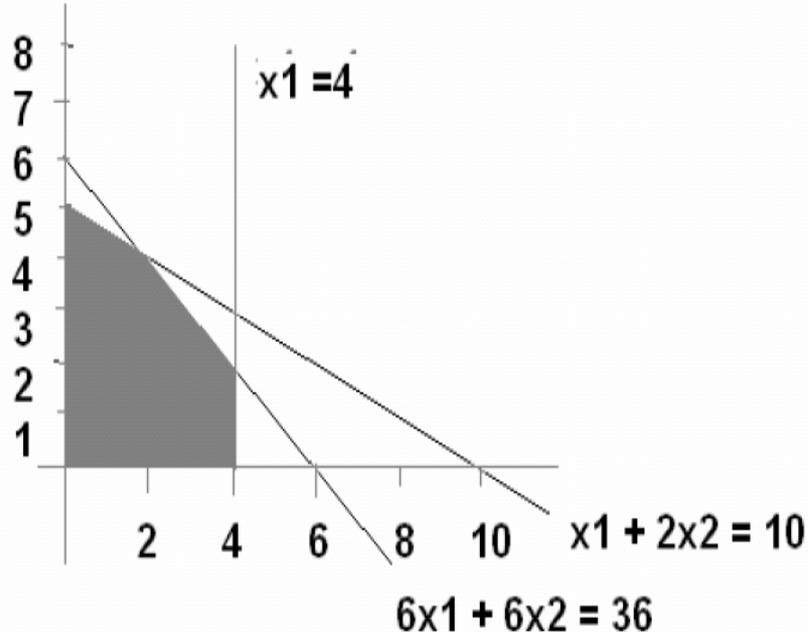
■ Sistem kendala

- Dalam masalah ini kendala adalah kebutuhan maksimum akan sumber daya dalam pembuatannya. Kendala untuk bahan mentah adalah: $X_1 + 2X_2 \leq 10$ dan buruh $6X_1 + 6X_2 \leq 36$
- Pada contoh ini digunakan pertidaksamaan " \leq " yang menunjukkan jumlah maksimum bahan mentah yang dibutuhkan.

■ Jadi model matematika :

- Memaksimumkan $Z = 4X_1 + 5X_2$
- Dengan syarat : $X_1 + 2X_2 \leq 10$
 - $6X_1 + 6X_2 \leq 36$
 - $X_1 \leq 4$
 - $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

■ Penyelesaian Grafik model LP:



- Karena solusi optimum terlatak pada suatu titik pojok yang merupakan perpotongan dari dua kendala atau pada titik B maka x_1 dan x_2 dapat dicari melalui penyelesaian dua persamaan kendala ini dengan metode substitusi atau eliminasi.

- $X_1 + 2X_2 \leq 10$

- $6X_1 + 6X_2 \leq 36$

- sehingga $x_1 = 2$ dan $x_2 = 4$ bila dimasukkan ke fungsi tujuan diperoleh $Z = 28$.

Tugas

- PT. Sumber Produksi menghasilkan 2 produksi yaitu produk I dan produk II. Untuk menghasilkan kedua produksi tersebut melalui 3 mesin berurutan:

Produksi	Mesin Per unit			Laba
	Mesin I	Mesin II	Mesin III	
1	10	6	8	2
2	5	20	15	3

Tentukan:

- a. variabel
- b. formasi
- c. solusi optimum

Contoh soal :

Perusahaan meubel TEKUN BELAJAR memproduksi dua jenis alat Rumah tangga yaitu rak buku dan meja. Setiap hasil produksi harus melalui dua tahap yaitu pemotongan dan perampungan. Untuk pemotongan tiap rak buku memerlukan waktu 4 jam dan untuk meja juga sama. Untuk proses perampungan memerlukan tiap rak memerlukan waktu 3 jam dan tiap meja 2 jam. Rak buku per buah memberi laba Rp 8000,- dan meja per buah Rp 6000,- Waktu yang tersedia untuk pemotongan tiap periode waktu 100 jam dan untuk perampungan tersedia 60 jam.

Perusahaan ingin menentukan jumlah produksi untuk masing-masing jenis barang agar diperoleh laba maksimum.

- Suatu perusahaan untuk dapat meraih konsumen berpenghasilan tinggi, perusahaan ini memutuskan untuk melakukan promosi dalam dua macam acara TV yaitu pada acara hiburan dan acara olahraga :

Pemirsa	Lamanya Promosi		Minimal kapasitas
	Hiburan	olahraga	
Wanita	7	2	28
Pria	2	12	24

Tentukan:

- a. Variabel
- b. Formasi Program Liniernya
- c. Grafik Program Liniernya
- d. Strategi promosi itu sebaiknya untuk meminimalkan kerugian?

■ Model matematika:

□ Minimumkan : $Z = 3X_1 + 2X_2$

□ Dengan syarat :

■ $X_1 + X_2 \geq 15$

■ $2X_1 + X_2 \geq 28$

■ $X_1 + 2X_2 \geq 20$

■ $X_1 \leq 0, X_2 \leq 0$

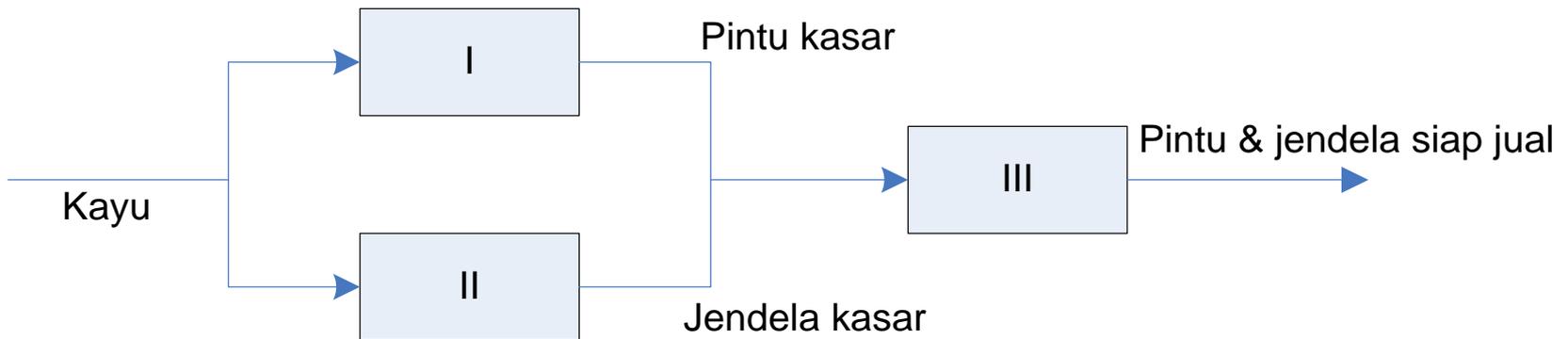
□ Tentukan:

a. Grafik Program Linier

b. Nilai X_1 dan X_2 dan Z

Contoh : 2

Pabrik kayu menghasilkan dua produk ; pintu dan jendela dengan proses sebagai berikut :



Lanjutan...

Tiap mesin di unit I dapat menghasilkan \rightarrow 1 pintu tiap 3 jam

Tiap mesin di unit II dpt menghasilkan \rightarrow 1 jendela tiap 2 jam

Tiap mesin di unit III dpt menghasilkan \rightarrow 1 pintu tiap 2 jam
1 jendela tiap 1 jam

Terdapat 4 mesin di unit I

Terdapat 3 mesin di unit II

Terdapat 3 mesin di unit III

Tiap hari jam kerja yang tersedia adalah 9 jam.

Keuntungan tiap pintu adalah 20 ribu.

Keuntungan tiap jendela adalah 15 ribu.

Buat formulasi program liniernya sepaya didapat keuntungan yang maksimum

Penyelesaian :

- x_1 : banyaknya pintu yang di produksi
 x_2 : banyaknya jendela yang di produksi
 z : Keuntungan

$$z = 20x_1 + 15x_2$$

$$3x_1 \leq 4 \times 9$$

$$2x_2 \leq 3 \times 9$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3 \times 9$$

Formulasi Program Linier :

$$\text{Max } z = 20x_1 + 15x_2$$

$$\text{s.l } 3x_1 \leq 36$$

$$2x_2 \leq 27$$

$$2x_1 + x_2 \leq 27$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Penyelesaian Program Linier

Metode Grafik

Pada umumnya mengikuti langkah-langkah sebagai berikut :

- Merumuskan masalah asli menjadi model matematika yang sesuai dengan syarat-syarat yang diperlukan dalam model Program Linier, yaitu mempunyai *fungsi tujuan*, *fungsi kendala*, *syarat ikatan non-negatif*.
- Kendala-kendala yang ada digambar hingga dapat diperoleh *daerah penyelesaian (Daerah yang Memenuhi Kendala(DMK)/Wilayah Kelayakan)/ Daerah Fisibel* yang titik-titik sudutnya diketahui dengan jelas.
- Nilai fungsi sasaran (fungsi tujuan) dihitung di setiap titik sudut daerah penyelesaian (DMK).

Lanjutan...

- Dipilih nilai yang sesuai dengan fungsi tujuan (kalau memaksimumkan berarti yang nilainya terbesar dan sebaliknya).
- Jawaban soal asli sudah diperoleh.

Catatan :

Metode Grafik hanya dapat digunakan dalam pemecahan masalah program linier yang ber “dimensi” : $2 \times n$ atau $m \times 2$, karena keterbatasan kemampuan suatu grafik dalam “menyampaikan” sesuatu (sebenarnya grafik 3 dimensi dapat digambarkan, tetapi sangat tidak praktis).

Contoh :

“PT. Rakyat Bersatu” menghasilkan 2 macam produk. Baik produk I maupun produk II setiap unit laku Rp. 3000,-. Kedua produk tersebut dalam proses pembuatannya perlu 3 mesin. Produk I perlu 2 jam mesin A, 2 jam mesin B, dan 4 jam mesin C. Produk II perlu 1 jam mesin A, 3 jam mesin B, dan 3 jam mesin C. Tersedia 3 mesin A yang mampu beroperasi 10 jam per mesin per hari, tersedia 6 mesin B yang mampu beroperasi 10 jam per mesin per hari, dan tersedia 9 mesin C yang mampu beroperasi 8 jam per mesin per hari. Berikan saran kepada pimpinan “PT. Rakyat Bersatu” sehingga dapat diperoleh hasil penjualan yang maksimum ! Dan berapa unit produk I dan produk II harus diproduksi ?

Penyelesaian :

- Merumuskan permasalahan Program Linier ke dalam model Matematika :

Misalkan :

produk I akan diproduksi sejumlah X_1 unit dan

produk II akan diproduksi sejumlah X_2 unit

Maka Fungsi tujuannya adalah :

$$\text{Max } Z = 3000 X_1 + 3000 X_2$$

Lanjutan...

	M_A	M_B	M_C	Harga jual per unit
Produk I	2 jam	2 jam	4 jam	Rp. 3000,-
Produk II	1 jam	3 jam	3 jam	Rp. 3000,-
Jumlah Mesin	3 buah	6 buah	9 buah	Memaksimumkan
Lama Operasi	10 jam/mesin	10 jam/mesin	8 jam/mesin	
Total waktu Operasi	30 jam	60 jam	72 jam	

Keterangan :

Lama operasi adalah dalam jam/hari/mesin.

Total waktu operasi adalah sama dengan jumlah mesin x lama operasi (dalam jam/hari/tipe mesin).

$$\text{St } 2X_1 + X_2 \leq 30 \text{i)}$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 60 \text{ii)}$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 72 \text{iii)}$$

$$X_1 \geq 0; X_2 \geq 0$$

Lanjutan...

- Menggambar fungsi-fungsi kendala sehingga diperoleh daerah penyelesaian (Daerah yang Memenuhi Kendala/ Wilayah kelayakan). Titik potong-titik potong dari ketidaksamaan fungsi kendalanya adalah :
 - Untuk persamaan $2X_1 + X_2 = 30$ (i), titik potong dengan sumbu- X_1 jika $X_2 = 0$: $2X_1 + 0 = 30$ diperoleh $X_1 = 15$ maka titik potong dengan sumbu- X_1 adalah **(15,0)**.
Sedangkan titik potong dengan sumbu- X_2 jika $X_1 = 0$: $0 + X_2 = 30$ diperoleh $X_2 = 30$ maka titik potong dengan sumbu- X_2 adalah **(0,30)**.
 - Untuk persamaan $2X_1 + 3X_2 = 60$ (ii), titik potong dengan sb- X_1 jika $X_2 = 0$: $2X_1 + 0 = 60$ diperoleh $X_1 = 30$ maka titik potong dengan sumbu- X_1 adalah **(30,0)**.
Sedangkan titik potong dengan sumbu- X_2 jika $X_1 = 0$: $0 + 3X_2 = 60$ diperoleh $X_2 = 20$ maka titik potong dengan sumbu- X_2 adalah **(0,20)**.

Lanjutan...

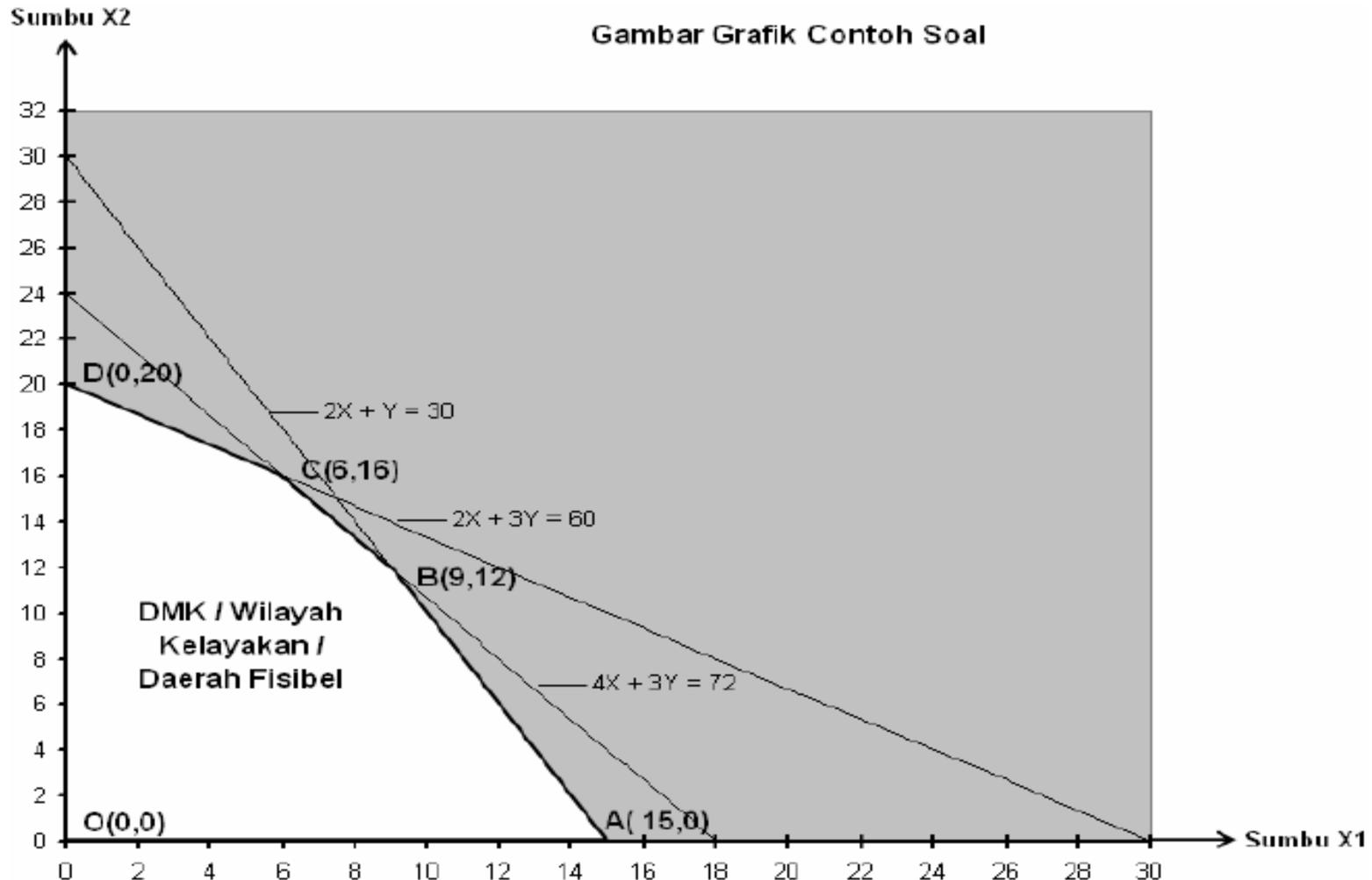
- Untuk persamaan $4X_1 + 3X_2 = 72$ (iii), titik potong dengan sumbu- X_1 jika $X_2 = 0$: $4X_1 + 0 = 72$ diperoleh $X_1 = 18$ maka titik potong dengan sumbu- X_1 adalah **(18,0)**.

Sedangkan titik potong dengan sumbu- X_2 jika $X_1 = 0$:

$0 + 3X_2 = 72$ diperoleh $X_2 = 24$ maka titik potong dengan sb- X_2 adalah **(0,24)**.

Lanjutan...

Sehingga jika digambarkan pada Koordinat Cartesius adalah :



Lanjutan...

Daerah Fisibel (Wilayah Kelayakan / Daerah yang Memenuhi Kendala (DMK)) adalah daerah yang merupakan irisan dari daerah yang memenuhi kendala :

1). $2X_1 + X_2 \leq 30$,

2). $2X_1 + 3X_2 \leq 60$,

3). $4X_1 + 3X_2 \leq 72$,

4). $X_1 \geq 0$;

5). $X_2 \geq 0$

Jadi daerah yang memenuhi ke-5 daerah tersebut terletak di dalam daerah yang dibatasi oleh titik-titik **O(0,0)**, **A(15,0)**, **D(0,20)**, titik **B** yaitu titik potong antara garis $2X_1 + X_2 = 30$ dan garis $4X_1 + 3X_2 = 72$, dan titik **C** adalah titik potong antara garis $2X_1 + 3X_2 = 60$ dan garis $4X_1 + 3X_2 = 72$

Lanjutan...

Adapun cara menghitung titik **B** dan **C** tersebut dengan menggunakan metode Eliminasi dan Substitusi sbb:

- Titik **B** perpotongan antara garis $2X_1 + X_2 = 30$ dan garis $4X_1 + 3X_2 = 72$, dengan mengeliminasi X_1 , dapat dihitung :

$$4X_1 + 2X_2 = 60 \text{i)}$$

$$4X_1 + 3X_2 = 72 \text{iii)}$$

$$- X_2 = - 12 \rightarrow \mathbf{X_2 = 12}$$

$$\rightarrow \mathbf{X_1 = 9} \quad \text{maka titik B adalah } \mathbf{(9,12)}$$

- Titik **C** perpotongan antara garis $2X_1 + 3X_2 = 60$ dan garis $4X_1 + 3X_2 = 72$, dengan mengeliminasi X_2 , dapat dihitung :

$$2X_1 + 3X_2 = 60 \text{i)}$$

$$4X_1 + 3X_2 = 72 \text{iii)}$$

$$- 2X_1 = - 12 \rightarrow \mathbf{X_1 = 6}$$

$$\rightarrow \mathbf{X_2 = 16} \quad \text{maka titik C adalah } \mathbf{(6,16)}$$

Lanjutan...

Daerah penyelesaian (Daerah yang Memenuhi Kendala/Wilayah Kelayakan) adalah daerah OABCD yang titik-titik sudutnya adalah : $O(0,0)$, $A(15,0)$, $B(9,12)$, $C(6,16)$, dan $D(0,20)$.

Penyelesaian dari soal diatas adalah menghitung nilai fungsi sasaran ($Z = 3000 X_1 + 3000 X_2$) di setiap titik sudut-titik sudut Daerah yang Memenuhi Kendala, sehingga:

- Titik O $(0,0) \rightarrow Z(0,0) = 3000.(0) + 3000.(0) = 0$,
- Titik A $(15,0) \rightarrow Z(15,0) = 3000.(15) + 3000.(0) = 45.000$
- Titik B $(9,12) \rightarrow Z(9,12) = 3000.(9) + 3000.(12) = 63.000$
- Titik C $(6,16) \rightarrow Z(6,16) = 3000.(6) + 3000.(16) = 66.000$
- Titik D $(0,20) \rightarrow Z(0,20) = 3000.(0) + 3000.(20) = 60.000$

Lanjutan...

Fungsi Tujuan adalah mencari nilai maksimumnya sehingga nilai yang sesuai adalah :

- Terletak pada titik $C(6,16)$
- Dengan nilai fungsi tujuannya Rp. 66.000,00

Sehingga agar diperoleh laba yang maksimum maka Pimpinan "PT. Rakyat Bersatu" harus memproduksi :

- *Produk I* sebanyak 6 unit dan
- *Produk II* sebanyak 16 unit

sehingga mendapat laba maksimum sebesar *Rp.66.000,00.*

Penutup

Dalam program linier ini tujuan yang ingin dicapai adalah mencari nilai paling optimum yaitu memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan.

Dalam penyelesaian persoalan program linier ini harus diperhatikan kendala-kendala yang ada sehingga hasil yang diperoleh merupakan hasil yang paling optimum sesuai dengan tujuan yang ingin dicapai.

Dalam penyelesaian persoalan program linier bisa digunakan beberapa metode dimana diantaranya adalah:

- Metode Grafik
- Metode Matrik

Tugas

1. Suatu perusahaan akan memproduksi 2 macam barang yang jumlahnya tidak boleh lebih dari 18 unit. Keuntungan dari kedua produk tersebut masing-masing adalah Rp. 750,- dan Rp. 425,- per unit. Dari survey terlihat bahwa produk I harus dibuat sekurang-kurangnya 5 unit sedangkan produk II sekurang-kurangnya 3 unit. Mengingat bahan baku yang ada maka kedua produk tersebut dapat dibuat paling sedikit 10 unit. Tentukan banyaknya produk yang harus dibuat untuk mendapatkan keuntungan yang maksimum ?

Lanjutan...

2. Sebagai contoh dalam memformulasikan permasalahan, berikut ini akan dibahas perusahaan Krisna Furniture yang akan membuat meja dan kursi. Keuntungan yang diperoleh dari satu unit meja adalah \$7,- sedang keuntungan yang diperoleh dari satu unit kursi adalah \$5,-. Namun untuk meraih keuntungan tersebut Krisna Furniture menghadapi kendala keterbatasan jam kerja. Untuk pembuatan 1 unit meja dia memerlukan 4 jam kerja. Untuk pembuatan 1 unit kursi dia membutuhkan 3 jam kerja. Untuk pengecatan 1 unit meja dibutuhkan 2 jam kerja, dan untuk pengecatan 1 unit kursi dibutuhkan 1 jam kerja. Jumlah jam kerja yang tersedia untuk pembuatan meja dan kursi adalah 240 jam per minggu sedang jumlah jam kerja untuk pengecatan adalah 100 jam per minggu. Berapa jumlah meja dan kursi yang sebaiknya diproduksi agar keuntungan perusahaan maksimum?

Lanjutan...

3. Sebuah industri kecil memproduksi dua jenis barang A dan B dengan memakai dua jenis mesin M1 dan M2. Untuk membuat barang A, mesin M1 beroperasi selama 2 menit dan mesin M2 beroperasi selama 4 menit. Untuk membuat barang B, mesin M1 beroperasi selama 2 menit dan mesin M2 beroperasi selama 4 menit. Mesin M1 dan M2 masing-masing beroperasi tidak lebih 8 jam tiap hari. Keuntungan bersih untuk setiap barang A adalah Rp. 250,00 dan untuk barang B adalah Rp.500,00. Berapakah jumlah barang A dan B harus diproduksi agar keuntungannya yang sebesar-besarnya dan besarnya keuntungan tersebut !