# METODA SIMPLEKS

# Metoda Simpleks

- Suatu metoda yang menggunakan prosedur aljabar untuk menyelesaikan programa linier.
- Proses penyelesaiannya dengan melakukan iterasi dari fungsi pembatasnya untuk mencapai fungsi tujuannya.
- Untuk penyelesaian, model ketidaksamaan dari fungsi pembatas harus diubah terlebih dahulu kedalam bentuk persamaan.
- Pengubahan bentuk ketidaksamaan menjadi persamaan adalah dengan penambahan 'slack variabel' atau pengurangan sebesar 'surplus variabel'.

# Pengubahan Model Ketidaksamaan → Persamaan

**Model Ketidaksamaan**

Maksimasi : $X_0 = 4\ X_1 + 3\ X_2$

Pembatas :

$$
\begin{aligned}
2\ X_1 + 3\ X_2 &\le 6 \\
-3\ X_1 + 2\ X_2 &\le 3 \\
2\ X_2 &\le 5 \\
2\ X_1 + X_2 &\le 4 \\
X_1, X_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

**Model Persamaan**

Maksimasi : $X_0 = 4\ X_1 + 3\ X_2$

Pembatas :

$$
\begin{aligned}
2\ X_1 + 3\ X_2 + S_1 &= 6 \\
-3\ X_1 + 2\ X_2 + S_2 &= 3 \\
2\ X_2 + S_3 &= 5 \\
2\ X_1 + X_2 + S_4 &= 4 \\
X_1, X_2\ S_1, S_2\ S_3\ S_4 &\ge 0
\end{aligned}
$$

**S adalah ‘slack variabel’, penambah ketidaksamaan ≤**

# Pembentukan Tabel Simpleks

1 2 3 4 5 7 6

| Var Basis | $X_0$ | Koefisien dari | | | | | | RHS Ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $b_j$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | . . . . . . . | $X_n$ | |
| | | | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | . . . . . . . | $c_n$ | |
| | $c_1$ | $b_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | . . . . . . . | $a_{1n}$ | |
| | $c_2$ | $b_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | . . . . . . . | $a_{2n}$ | |
| | $c_3$ | $b_3$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | . . . . . . . | $a_{3n}$ | |
| | . | . | | | | | | |
| | $c_m$ | $b_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $a_{m3}$ | . . . . . . . | $a_{mn}$ | |
| | $\Sigma(c_j\, b_j)$ | | $(\Sigma(a_{11}\, b_j) - c_j)$ | | | | | |

# Penjelasan Tabel Simpleks

1. Kolom 1, berisi variabel basis yaitu variabel-variabel yang membentuk matrik satuan dari kumpulan fungsi pembatas.
2. Kolom 2, berisi konstanta dari variabel basis yang terdapat pada fungsi tujuan.
3. Kolom 3, berisi dari nilai $b_j$, , yaitu nilai pada sisi kanan ketidaksamaan dari fungi pembatas.
4. Kolom 4, Xi merupakan variabel keputusan, $c_i$ merupakan konstanta dari fungsi tujuan.

# Penjelasan Tabel Simpleks

5. Kolom 5, berisi konstanta dari persamaan - persamaan yang membentuk fungsi pembatas.
6. Kolom 6, berisi nilai hasil perhitungan untuk menentukan variabel basis yang meninggalkan (bukan variabel basis lagi) dengan memilih $b_j/a_{ij}$ terkecil, dimana $a_{ij} > 0$

# Penjelasan Tabel Simpleks

7. Kolom 7, berisi nilai-nilai untuk menentukan variabel masuk atau ‘Entering Variable’ (calon variabel basis baru) dengan memilih nilai paling negatif untuk fungsi tujuan maksimum atau sebaliknya untuk fungsi tujuan minimum dari perhitungan rumus $(\Sigma(a_{11}\, b_j) - c_j)$.

# Contoh :

**$S_4$ Variabel yg meninggalkan**

| **Var Basis** | $X_0$ | $b_j$ | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | **RHS Ratio** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 4 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $S_1$ | **0** | **6** | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6/2 |
| $S_2$ | **0** | **3** | -3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| $S_3$ | **0** | **5** | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| $S_4$ | **0** | **4** | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4/2 |
| | | **0** | **-4** | **–3** | **0** | **0** | **0** | **0** | |

The header "Koefisien dari" spans the $b_j$ through $S_4$ columns.

**$X_1$ menjadi Variabel masuk**

# Contoh :

**Model Ketidaksamaan**

Maksimasi : $X_0 = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$

Pembatas :

$$\begin{aligned}
X_1 + 2X_2 + X_3 &\leq 430 \\
3X_1 \qquad\qquad + 2X_3 &\leq 460 \\
X_1 + 4X_2 \qquad\qquad &\leq 420 \\
X_1, X_2, X_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

**Model Persamaan**

Maksimasi : $X_0 = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$

Pembatas :

$$\begin{aligned}
X_1 + 2X_2 + X_3 + S_1 &= 430 \\
3X_1 \qquad + 2X_2 + S_2 &= 460 \\
2X_1 + X_2 \qquad\qquad + S_4 &= 420 \\
X_1, X_2, X_3\ S_1, S_2\ S_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

# Langkah Penyelesaian Dengan Simpleks

1. Memindahkan model persamaan matematik ke tabel.
2. $S_1$ ,$S_2$.,$S_3$ merupakan variabel basis, karena membentuk **matriks satuan**

| Var Basis | $X_0$ | Koefisien dari | | | | | | | RHS Ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $b_j$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ . | $S_2$. . | $S_3$. | |
| | | | 4 | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
| $S_1$ | **0** | 430 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| $S_2$ | **0** | 460 | 3 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | |
| $S_3$ | **0** | 420 | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| | | | | | | | | | |

3. Menentukan nilai-nilai untuk mendapatkan ‘Entering variabel’, misal : kolom $X_1$ = ((1*0 + 3*0 + 1*0) – 4) = -4

| Var Basis | $X_0$ | Koefisien dari | | | | | | | RHS Ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $b_j$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ . | $S_2$. . | $S_3$. | |
| | | | 4 | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
| $S_1$ | **0** | 430 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| $S_2$ | **0** | 460 | 3 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | |
| $S_3$ | **0** | 420 | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| | | 0 | -4 | –2 | –5 | 0 | 0 | 0 | |

4. Dari nilai-nilai tersebut, $X_3$ merupakan ‘**Entering Variable**’

5. Menentukan nilai-nilai untuk mendapatkan '**Leaving variabel**', misal : baris $S_1$ = 430/1 $S_2$ =460/2

| Var Basis | $X_0$ | $b_j$ | Koefisien dari | | | | | | RHS Ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | |
| | | | 4 | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
| $S_1$ | **0** | 430 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 430 |
| $S_2$ | **0** | 460 | 3 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 230 |
| $S_3$ | **0** | 420 | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| | | 0 | -4 | –2 | –5 | 0 | 0 | 0 | |

6. Didasarkan pada tabel sebelumnya, maka var.basis $S_2$ diganti dengan $X_3$ dan semua nilai pada baris tersebut dibagi dengan nilai interseksi dalam hal ini adalah 2

| **Var Basis** | $\mathbf{X_0}$ | **Koefisien dari** | | | | | | | **RHS Ratio** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\mathbf{b_j}$ | $X_1$ 4 | $X_2$ 2 | $X_3$ 5 | $S_1$ . 0 | $S_2$. . 0 | $S_3$. 0 | |
| $S_1$ | **0** | 200 | - 0.5 | 2 | 0 | 1 | -0.5 | 0 | |
| $X_3$ | **5** | 230 | 1.5 | 0 | 1 | 0 | 0.5 | 0 | |
| $S_3$ | **0** | 420 | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| | | 1150 | 3.5 | -2 | 0 | 0 | 2.5 | 0 | |

Pivot Point = baris yang digunakan sebagai dasar iterasi

7. Dengan pivot point dilakukan iterasi untuk memperoleh nilai-nilai yang baru dari baris atau var. basis yang lama.

8. Tentukan Entering dan Leaving variable dengan cara yang sama dengan sebelumnya

| Var Basis | $X_0$ | $b_j$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | RHS Ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Koefisien dari | | | | | | |
| | | | 4 | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
| $S_1$ | **0** | 200 | - 0.5 | 2 | 0 | 1 | -0.5 | 0 | 100 |
| $X_3$ | **5** | 230 | 1.5 | 0 | 1 | 0 | 0.5 | 0 | |
| $S_3$ | **0** | 420 | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 105 |
| | | 1150 | 3.5 | -2 | 0 | 0 | 2.5 | 0 | |

Entering Variable

Leaving Variabel

| Var Basis | $X_0$ | Koefisien dari | | | | | | | RHS Ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $b_j$ | $X_1$ 4 | $X_2$ 2 | $X_3$ 5 | $S_1$ 0 | $S_2$ 0 | $S_3$ 0 | |
| $X_2$ | **2** | 100 | -0.25 | 1 | 0 | 0.5 | -0.25 | 0 | |
| $X_3$ | **5** | 230 | 1.5 | 0 | 1 | 0 | 0.5 | 0 | |
| $S_3$ | **0** | 20 | 2 | 0 | 0 | -2 | 1 | 1 | |
| | | 1350 | 3 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | |

9. Dari iterasi berikut, nilai-nilai dari **$(\Sigma(a_{ij}\ b_j) - c_j)$.** semuanya positif berarti kondisi sudah optimal, dengan hasil $X_1 = 0$ , $X_2 = 100$, $X_3 = 230$

# Teknik ‘Artificial Variable’

- Bila pada fungsi pembatas ada tanda ketidaksamaan $\geq$ dan = maka penyelesaiannya dapat dilakukan dengan 2 teknik, yaitu :
  - Teknik M (Big M Method)
  - Teknik 2 phasa.

# Teknik M (Big M Method)

| Model Ketidaksamaan | Model Persamaan |
|---|---|
| Maksimasi : $X_0 = 4X_1 + X_2$ | Maksimasi : $X_0 = 4X_1 + X_2$ |
| Pembatas : $3X_1 + X_2 = 3$ | Pembatas : $3X_1 + X_2 = 3$ |
| $4X_1 + 3X_2 \geq 6$ | $4X_1 + 3X_2 - S_1 = 6$ |
| $X_1 + 2X_2 \leq 3$ | $2X_1 + X_2 + S_2 = 3$ |
| $X_1, X_2 \geq 0$ | $X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$ |

Untuk fungsi pembatas pertama dan kedua tidak menyediakan variabel basis yang jelas, sehingga tidak membentuk matrix satuan.

Dengan menambahkan artificial variabel maka modelnya sebagai berikut :

# Teknik M (Big M Method)

**Model Ketidaksamaan**

Minimasi : $X_0 = 4X_1 + X_2$

Pembatas : $3X_1 + X_2 = 3$

$4X_1 + 3X_2 \geq 6$

$X_1 + 2X_2 \leq 3$

$X_1, X_2 \geq 0$

**Model Persamaan**

Minimasi : $X_0 = 4X_1 + X_2 + MR_1 + MR_2$

Pembatas : $3X_1 + X_2 + R_1 = 3$

$4X_1 + 3X_2 - S_1 + R_2 = 6$

$2X_1 + X_2 + S_2 = 3$

$X_1, X_{2\,,}, S_1, S_2, R_1, R_1 \geq 0$

**SILAHKAN ANDA SELESAIKAN DENGAN MENGGUNAKAN SIMPLEKS**

# Metoda Dua Phasa

Untuk kondisi dimana penggunaan metoda ‘Big M’ menimbulkan kesahan dalam perhitungan, dapat digunakan Metoda 2 Phasa, sebagai berikut :

- Phase I : Formulasikan permasalahan baru dengan menggantikan fungsi obyektif yang baru menjadi ***minimasi*** jumlah semua artifisial variabel.
- Phase II : Dengan menggunakan hasil yang optimum untuk phase I sebagai awal penyelesaian permasalahan yang sebenarnya.

# Contoh Metoda 2 Phase

**Model Persamaan**

Minimasi : $X_0 = 4X_1 + X_2 + MR_1 + MR_2$

Pembatas : $3X_1 + X_2 + R_1 = 3$

$4X_1 + 3X_2 - S_1 + R_2 = 6$

$2X_1 + X_2 + S_2 = 3$

$X_1, X_2, S_1, S_2, R_1, R_1 \geq 0$

Berdasarkan Model persamaan tersebut, maka pada Phase I mempunyai Obyektif yang baru sbb :

**Minimasi** : $r_0 = R_1 + R_2$

# Tabel Simpleks Phase I

| Var Basis | $X_0$ | $b_j$ | | Koefisien dari | | | | | | RHS Ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $R_1$ | $R_2$ | $S_2$ | |
| | | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| $R_1$ | **1** | 3 | | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3/3 |
| $R_2$ | **1** | 6 | | 4 | 3 | -1 | 0 | 1 | 0 | 6/4 |
| $S_3$ | **0** | 3 | | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3/1 |
| | | 0 | | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

Entering Variable

Leaving Variable

# Tabel Simpleks Phase I

| Var Basis | $X_0$ | Koefisien dari | | | | | | | RHS Ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $b_j$ | $X_1$ 0 | $X_2$ 0 | $S_1$ 0 | $R_1$ 1 | $R_2$ 1 | $S_2$ 0 | |
| $X_1$ | **0** | 1 | 1 | 1/3 | 0 | 1/3 | 0 | 0 | 3 |
| $R_2$ | **1** | 2 | 0 | 5/3 | -1 | -4/3 | 1 | 0 | 6/5 |
| $S_2$ | **0** | 2 | 0 | 5/3 | 0 | -1/3 | 0 | 1 | 6/5 |
| | | 0 | 0 | 5/3 | -1 | -7/3 | 0 | 0 | |

Entering Variable

Leaving Variable

# Tabel Simpleks Phase I

| Var Basis | $X_0$ | $b_j$ | Koefisien dari $X_1$ 0 | $X_2$ 0 | $S_1$ 0 | $R_1$ . 1 | $R_2$.. 1 | $S_2$. 0 | RHS Ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | **0** | 3/5 | 1 | 0 | 1/5 | 3/5 | -1/5 | 0 | |
| $X_2$ | **0** | 6/5 | 0 | 1 | -3/5 | -4/5 | 3/5 | 0 | |
| $S_2$ | **0** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | -1 | 1 | |
| | | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | |

$r_0$ = 0 menunjukan permasalahan Phasa I feasible, Phasa II dapat dilanjutkan

# Tabel Simpleks Phase II

Pada phasa II ini artificial variable nya dieliminasi dan tabelnya menjadi berikut :

| Var Basis | $X_0$ | Koefisien dari | | | | | RHS Ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $b_j$ | $X_1$ 4 | $X_2$ 1 | $S_1$ 0 | $S_2$ 0 | |
| $X_1$ | **4** | 3/5 | 1 | 0 | 1/5 | 0 | |
| $X_2$ | **1** | 6/5 | 0 | 1 | -3/5 | 0 | |
| $S_2$ | **0** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| | | 18/5 | 0 | 0 | 1/5 | 0 | |

Dari tabel terlihat solusinya belum optimal karena ada nilai **$(\Sigma(a_{11}\, b_j) - c_j)$.** Yang > 0, 1/5. Dengan iterasi selanjutnya mengeluarkan $S_2$ dan memasukan $S_1$ kedalam basic variabel akan didapat kondisi yang optimal

# LATIHAN

Kerjakan Soal Berikut :

1. Maksimasi : $X_0 = 6X_1 - 2X_2$

   Pembatas : $X_1 - X_2 \leq 1$

   $3X_1 - X_2 \leq 6$

   $X_1, X_2 \geq 0$

2. Maksimasi : $X_0 = 4X_1 + 4X_2$

   Pembatas : $2X_1 + 7X_2 \leq 1$

   $7X_1 + 2X_2 \leq 6$

   $X_1, X_2 \geq 0$